A N A L I Z A   F U N K C J O N A L N A

WPPT 3r., sem. letni
LISTA 14 (powtórkowa)

Wrocław, 15 czerwca 2011

ZADANIE 1. Rozważmy przestrzeń wszystkich ciągów skończonych (o różnych długościach). Sprawdź, że jest to przestrzeń liniowa. Jak wprowadzić w niej normę? Dlaczego NIE DA SIĘ wprowadzić w niej normy zupełnej?

ZADANIE 2. Weźmy pod uwagę zbiór wszelkich wielomianów. To jest przestrzeń liniowa. Pokaż, że jest ona homomorficzna z przestrzenią z poprzedniego zadania.

ZADANIE 3. Uzasadnij, że nie istnieje taka miara probabilistyczna na $[0,1]$, żeby dla funkcji ciągłych zbieżność jednostajna była równoważna z ich zbieżnością w $L^1(\mu)$.

ZADANIE 4. Wykaż, że przestrzenie $L^1([0,1])$ i $L^1([0,\infty))$ są izometrycznie izomorficzne.

Wskazówka: Funkcji $f(x)$ na $[0,\infty)$ przyporządkuj funkcję $g(y) = -\frac{f(-\ln y)}{y}$ na $[0,1]$.

ZADANIE 5. Udowodnij twierdzenie: W przestrzeni Hilberta H dany jest zbiór zwarty i wypukły K. Wtedy dla każdego $x \in H$ istnieje dokładnie jeden punkt $y \in K$ taki, że $d(x,y) = d(x,K)$.

Wskazówka: Wykaż, że funkcja $f(y) = d(x,y)$ jest ciągła na K (zatem osiąga swoje minimum), a następnie załóż, że minimum jest osiągane w dwóch punktach $y_1 \neq y_2$ i skorzystaj z własności normy w przestrzeni Hilberta aby pokazać, że punkt $\frac{y_1+y_2}{2}$ leży jeszcze bliżej.

ZADANIE 6. Udowodnij, że każdy ciąg zbieżny słabo (w jakiejś przestrzeni unormowanej) bądź $*$-słabo (w jakiejś przestrzeni sprzężonej) jest ograniczony w normie.

ZADANIE 7. Zidentyfikuj zbieżność słabą w przestrzeni $C(X)$ (X - zwarta).

Tomasz Downarowicz